ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω I ανοιχτό διάστημα (φραγμένο ή μη) ($I \subseteq R$) και Ω ανοιχτό υποσύνολο του R^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1: Αν $F: I \times \Omega \to R$ είναι μια πραγματική συνάρτηση $n+2$ μεταβλητών και $y: I \to R$ μια άγνωστη συνάρτηση, η εξίσωση

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

όπου $y^{(k)}(x) := \dfrac{d^k y(x)}{dx^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε.).**

Ορισμός 2: Η (1) ονομάζεται Σ.Δ.Ε. **τάξης** n όταν η συνάρτηση $F(u, u_o, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ δεν είναι σταθερή ως προς τη μεταβλητή u_n, δηλ. όταν η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στην εξίσωση είναι η $y^{(n)}$.

Ορισμός 3: Ονομάζουμε **λύση** της (1) κάθε πραγματική συνάρτηση $y: I \to R$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη στο I ενώ παράλληλα για κάθε $x \in I$ ισχύουν τα εξής:

$$(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in \Omega,$$

και

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Το x στην εξίσωση (1) ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **άγνωστη συνάρτηση**. Το γράφημα μιας λύσης $y(x)$ ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** της (1).

Ορισμός 4: Αν μια Σ.Δ.Ε. n τάξης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό υποσύνολο D του R^{n+1}, τότε θα λέμε ότι η (2) είναι η **κανονική** ή **λυμένη** της μορφή.

Σημείωση: Η μορφή (1) μιας Σ.Δ.Ε. θα λέγεται **γενική** ή **πεπλεγμένη**.

Ορισμός 5: Έστω ότι δίνεται η διαφορική εξίσωση (2) και ένα σημείο $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ του πεδίου ορισμού της f. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας λύσης της (2) η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, y^{(1)}(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (3)$$

λέγεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** ή **πρόβλημα Cauchy** για την (2).

Οι συνθήκες (3) ονομάζονται **αρχικές συνθήκες** ή **συνθήκες Cauchy**.

Ορισμός 6: Μια συνάρτηση

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (4)$$

που εξαρτάται από n πραγματικές σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$, θα λέγεται **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης (2) όταν

(i) για κάθε σημείο $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \Delta$, όπου Δ ανοικτό υποσύνολο του R^n, η (1.4) είναι λύση της (2)

και

(ii) για κάθε σημείο $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in D_1$, όπου D_1 ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού D της f, υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \Delta$ τέτοιο ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (3).

Η λύση που παίρνουμε για μια συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ονομάζεται **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης (2).

Ορισμός 7: Αν J είναι ένα ανοικτό υποδιάστημα του R, θα λέμε ότι το σύστημα

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ t \in J$$

παράγει τη **λύση** της (2) **υπό παραμετρική μορφή** αν και μόνον αν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ είναι n φορές παραγωγίσιμες, η $x(t)$ είναι αντιστρέψιμη και η σύνθετη συνάρτηση

$$y = y(t(x))$$

είναι λύση της (2).

Ορισμός 8: Το σύστημα των n ισοτήτων

$$\psi_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0 \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\psi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_n) = 0 \ ,$$

θα λέμε ότι αποτελεί ένα **γενικό ολοκλήρωμα** της (2) όταν για κάθε σημείο $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \Delta$, όπου Δ ανοικτό υποσύνολο του R^n, υπάρχει λύση $y(x)$ της (2) η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις (5) και, αντίστροφα, όταν κάθε n φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις (5) είναι λύση της (2).

Παρατήρηση: Η διαδικασία προσδιορισμού των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση** ή **ολοκλήρωση** της εξίσωσης.